

Arbeitsmaterialien für Lehrkräfte

Kreative Ideen und Konzepte inkl. fertig ausgearbeiteter Materialien und Kopiervorlagen für einen lehrplangemäßen und innovativen Unterricht

Thema: Mathematik Sekundarstufe I, Ausgabe: 9
Titel: Zahlenrätsel und lineare Gleichungen (25 S.)

Produktinweis zur »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe«

Dieser Beitrag ist Teil einer Print-Ausgabe aus der »Kreativen Ideenbörse Sekundarstufe« der Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG*. Den Verweis auf die jeweilige Originalquelle finden Sie in der Fußzeile des Beitrags.

▶ Alle Beiträge dieser Ausgabe finden Sie [hier](#).

Seit über 15 Jahren entwickeln erfahrene Pädagoginnen und Pädagogen kreative Ideen und Konzepte inkl. sofort einsetzbarer Unterrichtsverläufe und Materialien für verschiedene Reihen der Ideenbörse.

▶ Informationen zu den Print-Ausgaben finden Sie [hier](#).

* Ausgaben bis zum Jahr 2015 erschienen bei OLZOG Verlag GmbH, München

Beitrag bestellen

▶ Klicken Sie auf die Schaltfläche **Dokument bestellen** am oberen Seitenrand.

▶ Alternativ finden Sie eine Volltextsuche unter www.eDidact.de/sekundarstufe.

Piktogramme

In den Beiträgen werden – je nach Fachbereich und Thema – unterschiedliche Piktogramme verwendet. Eine Übersicht der verwendeten Piktogramme finden Sie [hier](#).

Nutzungsbedingungen

Die Arbeitsmaterialien dürfen nur persönlich für Ihre eigenen Zwecke genutzt und nicht an Dritte weitergegeben bzw. Dritten zugänglich gemacht werden. Sie sind berechtigt, für Ihren eigenen Bedarf Fotokopien in Klassensatzstärke zu ziehen bzw. Ausdrucke zu erstellen. Jede gewerbliche Weitergabe oder Veröffentlichung der Arbeitsmaterialien ist unzulässig.

▶ Die vollständigen Nutzungsbedingungen finden Sie [hier](#).

Haben Sie noch Fragen? Gerne hilft Ihnen unser Kundenservice weiter:

[Kontaktformular](#) | ✉ Mail: service@eDidact.de

✉ Post: Mediengruppe Oberfranken – Fachverlage GmbH & Co. KG
E.-C.-Baumann-Straße 5 | 95326 Kulmbach

☎ Tel.: +49 (0)9221 / 949-204 | 📠 Fax: +49 (0)9221 / 949-377

<http://www.eDidact.de> | <https://www.bildung.mgo-fachverlage.de>

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- Die Schüler erlernen und üben, mithilfe von linearen Gleichungen Zahlenrätsel zu lösen.
- Sie beschäftigen sich mit Zahlenrätseln und erfahren, dass man dabei entweder mit einer für das besondere Problem passenden guten Idee zum Ziel kommen kann oder mit dem bei vielen Aufgaben sicheren Weg, eine Gleichung aufzustellen und deren Lösungsmenge nach einem eingeübten Verfahren zu bestimmen.
- Die Schüler werden befähigt, die Frage „Wie **muss** ich diese Mathematikaufgabe bearbeiten?“ dadurch zu beantworten, dass sie sich wenigstens zwei verschiedene Lösungswege erarbeiten.

Zentrales Anliegen:

Eine Mathematikaufgabe kann für den Bearbeiter neuartig und daher eine echte Problemaufgabe sein. Dann wird von ihm **produktives Denken** gefordert, dann ist ein **kreativer Einfall** oder sogar eine überraschende glückliche Idee unverzichtbar. Typisch ist, dass ein solcher Einfall zu der Besonderheit der vorliegenden Aufgabe passen muss und dass er vermutlich nur bei wenigen ähnlichen Aufgaben erneut anwendbar sein wird. Aber die Vielfalt der Einfälle macht einen Teil der zu fördernden Persönlichkeitsentwicklung aus. Bedauerlich ist, dass sich eine solche gute, wegweisende Idee nicht auf Befehl einstellt.

Sehr viele unterschiedliche Aufgaben können dagegen regelmäßig erfolgreich bearbeitet werden, wenn der Bearbeitende über ein geeignetes methodisches Vorgehen, ein **formales Verfahren** (Einsatz eines Kalküls) verfügt. Ein solches Verfahren kann dann als **Technik** bezeichnet werden, wenn folgende Eigenschaften deutlich ausgeprägt sind: Vor allem ist eine Technik sehr oft wiederholbar und ihre Anwendung reduziert die Komplexität der Problemstellung. Ein solches Verfahren entlastet das Denken so, dass damit der Umfang erfolgreich lösbarer Aufgaben beträchtlich vergrößert wird. Zu den mathematischen Verfahren (Techniken) gehören die schriftlichen Rechenverfahren und auch der Einsatz von Bestimmungsgleichungen.

Wird das Verfahren „Einsatz von Gleichungen“ beherrscht, dann werden bei dessen Anwendung Kreativität und Einfallsreichtum weniger gefordert und daher auch in geringerem Maße gefördert. Natürlich sollen Bestimmungsgleichungen im Mathematikunterricht unstrittig dort eingesetzt werden, wo es unabdingbar ist – wenn beispielsweise eine Aufgabe unter Zeitdruck gelöst werden muss. Weil dieses technische Verfahren wiederholbar ist, kann es bei Prüfungen trotz Zeitbeschränkung die beruhigende Sicherheit geben, dass eine Lösung gewiss gelingen wird. Unter Zeitdruck sollte nur überprüft werden, ob Schüler eine eingeübte Technik anwenden können. Sind dagegen Geschicklichkeit und Einfallsreichtum unverzichtbar, dann fehlt die Sicherheit, dass sich die gute Idee rechtzeitig einstellen wird.

Nutzen wir die Vorteile einer Technik, werden wir auch bestrebt sein, **Nachteile weitgehend zu kompensieren**. Die Schule muss sich immer dessen bewusst bleiben, dass Lernen auch einen **Verlust** bedeuten kann. In unserem Fall kann die Fixierung auf Gleichungen die Kreativität, die Möglichkeit der Entstehung anderer Lösungsideen einschläfern. Um starres Denken zu vermeiden, werden daher auch Aufgaben angeboten, die zwar mithilfe von Gleichungen, aber eben auch mit einem für Schüler realistischen kreativen Einfall ohne Gleichungen mit geringerem Aufwand gelöst werden können. Schüler sind aufgefordert, immer wieder unterschiedliche Ansätze zu suchen und gelegentlich sogar verschiedenartige Lösungswege zu beschreiten. Wie jede Technik ist auch der Einsatz von Bestimmungsgleichungen nicht in der Lage, jedes Problem erfolgreich anzugehen. Entsprechende Aufgaben sollen nicht fehlen.

1.10**Zahlenrätsel und lineare Gleichungen****Vorüberlegungen****Zur Auswahl der Aufgaben**

Zwar sollen Probleme nicht nur im Mathematikunterricht bearbeitet werden, aber der Mathematikunterricht soll erfolgreiches Problemlöseverhalten durchaus auch für andere Bereiche fördern. Damit dies gelingen kann, müssen die zu bearbeitenden Aufgaben geeignet ausgewählt sein.

Eine oft auftretende Problemsituation ist folgende:

An ein Objekt (eine Zahl, eine Situation, eine geplante Handlung, einen Lehrer, einen Kandidaten für die Schülervvertretung, ...) werden einige Forderungen gestellt. Unter einer vorgegebenen Menge von Objekten sind solche anzugeben, die diesen Forderungen genügen.

Dann sind mehrere Möglichkeiten denkbar:

- I. *Die Forderungen sind unerfüllbar.*
Dann gibt es kein Objekt, das allen Forderungen genügt.
- II. *Die Forderungen sind erfüllbar.*
Dann können drei Unterfälle unterschieden werden:
 - II a. *Die Forderungen werden von einem einzigen Lösungsobjekt erfüllt.*
 - II b. *Die Forderungen werden von mehreren Lösungsobjekten, aber nicht von allen betrachteten Objekten erfüllt.*
 - II c. *Die Forderungen werden von allen betrachteten Objekten erfüllt.*

Für die Lösungsmenge einer linearen Gleichung gibt es drei Möglichkeiten: Es gibt ein einziges Lösungselement, es gibt kein Lösungselement oder die gesamte Grundmenge ist Lösungsmenge. Die Aufgaben sind entsprechend ausgewählt: Ein Rätsel kann genau eine Lösungszahl haben, es kann aber auch sein, dass es mehrere oder gar keine Lösungszahl gibt. Es gibt die Vorliebe für Aufgaben mit einer eindeutigen Lösung. Descartes nennt in den „Regeln zur Anleitung des Geistes“ ein Problem „vollkommen“, wenn es zu ihm ein einziges Lösungsobjekt gibt. Wir würden gegen den Geist des „kartesischen Zweifels“ verstoßen, würden wir uns dieser Auffassung nur deshalb anschließen, weil sie Descartes hatte und in vielen Schulbüchern bis heute zu finden ist. Hat jede mathematische Schulaufgabe ein einziges Lösungselement und stützt dies bei Schülern die Vorstellung, dass jedes Problem in der Welt eine und nur eine Lösung habe, dann dürfte dies autoritären Strukturen nützen, in denen der „Meister“ die Lösung mitteilen wird. Einer demokratischen Haltung entspricht die Erwartung, dass ein Problem zwar gelegentlich ein einziges Lösungselement haben kann, dass es aber genauso gut denkbar ist, dass mehrere angemessene Lösungsobjekte existieren und dass es sogar Probleme gibt, die nicht so gelöst werden können, dass alle Forderungen erfüllt werden, und bei denen daher Abstriche an den Forderungen im Konsens vorgenommen werden müssen. Auch unser Mathematikunterricht bewirkt – ob intendiert oder nicht – Erziehung. Soll das Lösen von Mathematikaufgaben eine vernünftige Vorbereitung auf den Umgang mit Problemen der Welt sein, dann darf bei den Schülern keinesfalls der Eindruck entstehen, dass bei Mathematikaufgaben stets ein einziges Lösungselement existieren muss.

Einordnung:

Nachdem lineare Gleichungen behandelt worden sind, soll dieser Teil der Gleichungslehre nun eine Anwendung finden. Die vorliegenden Arbeitsblätter führen in die Technik ein, Probleme mithilfe von Gleichungen (Bestimmungsgleichungen) zu bearbeiten. Dies soll so umfassend geschehen, dass die spätere Ausweitung auf angewandte Aufgaben möglichst gut vorbereitet ist. Eine solche Fortsetzung ist unerlässlich, denn beim Arbeiten mit Gleichungen sollen alle Schüler erfahren, dass Mathematik geeignet ist, nicht nur Zahlenrätsel, sondern auch allgemeine Probleme der Welt anzugehen.

Vorüberlegungen

Werden realitätsnahe Probleme herangezogen, können schon der Ansatz der Variablen und die Übersetzung des Aufgabentextes in algebraische Symbole beträchtliche Schwierigkeiten bereiten. Es ist empfehlenswert, das dem „Arbeiten mit Gleichungen“ zugrunde liegende klare Schema vorher mit möglichst einfachen Beispielen einzuführen und danach intensiv einzuüben. Da Zahlenrätsel Sachverhalte enthalten, die Schülern vertraut sind, sind sie dazu besonders geeignet. Dabei muss deutlich werden, dass sich das Verfahren auf eine Aussageform (Gleichung) bezüglich einer Grundmenge stützt. Beide, Gleichung und Grundmenge, sind im Allgemeinen unverzichtbar.

Da die Lösungen ausführlich dargestellt werden, können den Schülern einzelne Arbeitsblätter samt Lösungsblättern zur **selbstständigen Erarbeitung** überlassen werden. Die Aufgaben sind unterschiedlich anspruchsvoll, für einen **differenzierenden** Einsatz: Lernende entwickeln Fähigkeiten an der Abarbeitung von ihnen jeweils angemessenen Widerständen. Bei einzelnen Aufgaben werden die besonders befähigten Schüler gefordert. Gegebenfalls können diese ihre Lösungen in der Klasse vortragen.

Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Schüler können in einer ersten Einführung motiviert werden, sich mit der Technik „Arbeiten mit Gleichungen“ zu beschäftigen. Zuerst wird eine Aufgabe mithilfe einer „guten, wegweisenden Idee“ gelöst. Danach wird diese Aufgabe durch Formulierung als Gleichung erledigt. Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung wird nach einem eingeübten einfachen Verfahren ermittelt. Es kann geschehen, dass die dabei mühelos nacheinander ausgeführten Umformungen (Subtraktion von 11, Division durch 2) der kreativen Idee verblüffend entsprechen. Dann wird offensichtlich, dass die Technik „Arbeiten mit Gleichungen“ das Denken entlastet. (**Arbeitsblätter** siehe **M1 bis M3**; **Lösungen** siehe **M4 und M5**)
2. Schritt: Erfahrungsgemäß muss selbst bei Zahlenrätseln die Übersetzung eines deutschen Aufgabentextes in algebraische Symbolik geübt werden. Sie ist für Lernende durchaus nicht selbstverständlich. (**Arbeitsblätter** siehe **M6 bis M8**; **Lösungen** siehe **M9**)
3. Schritt: Es handelt sich um Anwendungen der „Lehre von den linearen Gleichungen“. Bei linearen Gleichungen muss die Lösungsmenge nicht in jedem Fall genau ein Element enthalten. Die Lösungsmenge kann leer sein, die Lösungsmenge kann genau ein Element besitzen oder die Grundmenge kann Lösungsmenge sein. Auch bei Zahlenrätseln kann es natürlich sein, dass eine einzige Zahl die gestellten Forderungen erfüllt. Es ist aber auch möglich, dass mehrere Zahlen allen Forderungen genügen und es kann auch geschehen, dass überhaupt keine Zahl alle gewünschten Eigenschaften besitzt. (**Arbeitsblätter** siehe **M10 bis M12**; **Lösungen** siehe **M13 und M14**)
4. Schritt: Ein interessanter Sonderfall sind endliche Grundmengen, denn hier kann ein systematisches Probieren aller Elemente vorteilhaft sein. (**Arbeitsblatt** siehe **M15**; **Lösung** siehe **M16**)
5. Schritt: Eine neu eingeführte Technik kann immer wieder geübt und dabei vertieft werden. (**Arbeitsblätter** siehe **M17 und M18**; **Lösungen** siehe **M19 und M20**)
6. Schritt: Zwar erweitert das Arbeiten mit Gleichungen die Möglichkeiten beträchtlich, aber auch diese Technik hat ihre Grenzen – nicht jedes Zahlenrätsel kann damit erfolgreich bearbeitet werden. (**Arbeitsblatt** siehe **M21**; **Lösung** siehe **M22**)

Zahlenrätsel und lineare Gleichungen	1.10
Arbeitsblatt 1 (1)	M1
Ein Zahlenrätsel	
<p>Aufgabe 1: Matthias sagt: „Wenn ich mich nicht irre, gibt es zwei aufeinanderfolgende Elferzahlen, die die Summe 20 625 haben.“ Um welche Zahlen kann es sich handeln?</p>	
<p>Wir erarbeiten uns eine Lösung:</p>	
<p>Was ist gesucht?</p> <p>_____</p>	
<p>Was wissen wir?</p> <p>_____</p>	
<p>Was kann als schwierig angesehen werden? Welche Situation wäre einfacher? Was wäre, wenn die beiden Zahlen nicht verschieden wären?</p>	
<p>Dann wäre die Summe _____.</p>	
<p>Wir haben eine Idee:</p> <p>Wir wählen eine Ersatzaufgabe mit zwei gleichen Zahlen! Wie kann dies erreicht werden?</p>	
<p><u>1. Möglichkeit:</u> Wir ersetzen die größere Zahl durch die kleinere. <u>2. Möglichkeit:</u> Wir ersetzen die kleinere Zahl durch _____. <u>3. Möglichkeit:</u> Wir ersetzen jede Zahl durch das arithmetische Mittel der beiden Zahlen.</p>	
<p><u>1. Möglichkeit:</u> Die kleinere Zahl soll erhalten bleiben. Dann wird von der größeren Zahl 11 subtrahiert.</p>	
<p>Die neue Summe ist $20\,625 - 11 =$ _____.</p>	
<p>Bei der kleineren Zahl handelt es sich um _____.</p>	
<p>Vorsicht! Wir sind bei den Überlegungen davon ausgegangen, dass es die beschriebenen Elferzahlen tatsächlich gibt. Dies kann der Aufgabenstellung keineswegs entnommen werden. Es muss überprüft werden:</p> <p>_____</p>	
<p>Ergebnis: _____</p>	
<p>Auftrag: Bearbeite in entsprechender Weise die zweite und die dritte Möglichkeit.</p>	